COMPARACIÓN DE MÉTODOS INDIRECTOS PARA LA MEDICIÓN DEL RADIO TERRÁQUEO, PROPUESTA BASADA EN LA DENSIDAD

COMPARISON OF INDIRECT METHODS FOR MEASURING THE EARTH'S RADIUS, A PROPOSAL BASED ON DENSITY

Jorge Ordoñez-Briones, Alexander Martínez-Delgado, Daniela Flores – López, M.A. Carrasco-Aguilar*.

Universidad Autónoma de Tlaxcala, Facultad de Ciencias Básicas, Ingeniería y Tecnología.
*Email: macarras2010@gmail.com

Recibido: 15 de Marzo de 2024 Aceptado: 17 de junio de 2024

RESUMEN

En éste artículo se presenta una comparación de tres métodos indirectos para obtener el radio de la tierra. El primero consiste en la determinación del punto subsolar y es parecido al realizado por Eratóstenes en el año 240 a.C., la diferencia es que el método utilizado puede hacerse experimentalmente cualquier día del año bajo ciertas circunstancias. El segundo se basa en la determinación de una sección del área terrestre mediante el uso de triángulos y rectángulos, y el tercero que no ha sido reportado, toma en cuenta la densidad de la tierra. Para el primer método mencionado se consideran las coordenadas geográficas propias de la ciudad de Apizaco, Tlaxcala

Palabras Clave: Punto subsolar, área terrestre, densidad de la tierra, coordenadas geográficas

ABSTRACT

This article presents a comparison of three indirect methods to obtain the radius of the earth. The first consists of the determination of the subsolar point and is similar to that carried out by Eratosthenes in the year 240 BC, the difference is that the method used can be done experimentally any day of the year under certain circumstances. The second is based on determining a section of the earth's area through the use of triangles and rectangles, and the third, which has not been reported, takes into account the density of the earth. For the first mentioned method, the geographical circumstances of the city of Apizaco, Tlaxcala are considered.

Keywords: Subsolar point, land area, land density, geographical coordinates

1. INTRODUCCIÓN

La tierra es el planeta más denso del sistema solar, ocupa el tercer sitio respecto a la distancia al sol y con respecto a su tamaño ocupa el quinto lugar. Se estima que comenzó a formarse hace 4,550 (Anguita, 2011) millones de años y los seres humanos modernos hemos vivido en ella desde hace aproximadamente 200,000 años (Anguita, 2011), tiempo suficiente para realizar estimaciones de algunas de sus características como lo es el diámetro. Para encontrar la primera medición de éste parámetro, hay que remontarse al año 240 a.C., cuando el filósofo, astrónomo, matemático y geógrafo griego Eratóstenes (Paléfato y col., 2009) basado en la medición del ángulo del sol incidente en las ciudades de Siena y Alejandría durante el solsticio determinó que el radio de la tierra estaría entre 6,244 Km y 7,358 Km. Dicho rango de estimación se obtiene, debido a que las medidas en esa época no estaban estandarizadas.

Hoy en día, la medida estimada más precisa es de 6,371 Km, definida gracias a los avances en sismología, que utiliza las ondas sísmicas sobre las capas internas del planeta, que de manera indirecta arrojan éste resultado.

Otros personajes de la historia ("Circunferencia de la Tierra", 2024), que obtuvieron estimaciones de las medidas del globo terrestre fueron: Posidonio alrededor del año 100 a.C. y Aryabhata en el año 525 d.C., sin embargo, sus estimaciones difieren en alto porcentaje con el valor real.

Otro enfoque igualmente explotado para alcanzar el objetivo propuesto es a través de la óptica geométrica basada en la disposición de triángulos en la superficie terrestre y su representación dentro de un rectángulo. En éste contexto se pretende iniciar, proponiendo una cantidad de triángulos que puedan encajar en una cuarta parte de la superficie terrestre, de tal manera que podamos obtener un área rectangular equivalente a la superficie terrestre considerada, que indirectamente me generaría un resultado para el radio. A éste método se le conoce como método de la triangulación (Triangulación) cuyo uso se remonta al Antigüo Egipto. Tales en el siglo VI a.C. emplea triángulos para calcular la altura de las pirámides a través de sombras. En el año 1048 los agrimensores (cartógrafos en la actualidad) árabes utilizaron métodos de triangulación para medir grandes distancias, entre ellos destaca Al Biruni quién uso técnicas de triangulación para medir el tamaño de la Tierra y las distancias entre diversos lugares. La triangulación de superficies es un método para obtener áreas de superficies irregulares mediante la descomposición en formas triangulares, evidentemente, la suma de las áreas de los triángulos da como resultado el área total.

El método de la densidad nace a partir de la consideración de que la luna nació a partir de una explosión de detritos producida a raíz de la colisión de un protoplaneta del tamaño de Marte, llamado Tea, contra la Tierra (Anguita, 2011). Se piensa que el impacto pudo haber sucedido hace aproximadamente 4,533 millones de años, destruyendo Tea y expulsando la mayor parte de su manto y una fracción significativa del manto terrestre hacia el espacio, mientras que el núcleo de Tea se hundió dentro del núcleo terrestre. Estimaciones actuales basadas en simulación sugieren que el 2% de la masa original de Tea acabó formando un disco de escombros, la mitad del cual se fusionó para formar la Luna de 1 a 100 años después del impacto. Por lo anterior conociendo algunas características de la luna y tomando en cuenta que comparten densidades similares, ya que su composición provendría de Tea y de la misma Tierra, se podría obtener una aproximación del radio terrestre.

1. **DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS UTILIZADOS**

2.1. Emulación del método de Eratóstenes

Calcular el radio terrestre utilizando el método de Eratóstenes es un método bien documentado (más de 35.000 resultados en buscador de Google), que se resume en localizar dos lugares diferentes sobre un mismo meridiano en un solsticio dado (de verano o invierno) y hacer mediciones de la distancia que los separa y de la sombra que produce un varilla perpendicular a la tierra en uno de los lugares en el medio día solar, para después generar las relaciones geométricas necesarias que nos permiten obtener indirectamente el radio requerido. Como vemos, para llevarlo a cabo es necesario localizar los lugares, que generalmente estarán separados por una distancia de cientos de kilómetros y hacerlo en un día específico del año. Aquí utilizamos un método (Troughton y Esteban, 2018; Sociedad Malagueña de Astronomía SMA, 2018, 21m36s) que mediante una sola medida cualquier día del año y determinando el mediodía subsolar, puede alcanzar el objetivo propuesto, utilizando un palo recto en posición vertical, un reloj, una cinta métrica y conexión a Internet. Para llevar a cabo el experimento, se coloca en primer lugar la varilla vertical sobre un suelo plano y se mide su longitud L y la sombra que arroja sobre el suelo. El cociente entre la sombra (s) y la longitud de la varilla (L) nos da la tangente del ángulo α que forman los rayos solares con la vertical, de donde se obtiene el ángulo mencionado, de la siguiente manera:

$$\tan\alpha = \frac{longitud\ sombra}{longitud\ varilla} = \frac{s}{L} \tag{1}$$

Por lo tanto:

$$a = arc \tan s/L \tag{2}$$

El cálculo aproximado también puede hacerse trazando un triángulo rectángulo semejante y midiendo el ángulo con un transportador como se muestra en la Figura 1. El ángulo complementario 90° – α nos permite saber a qué altura está el sol sobre el horizonte.

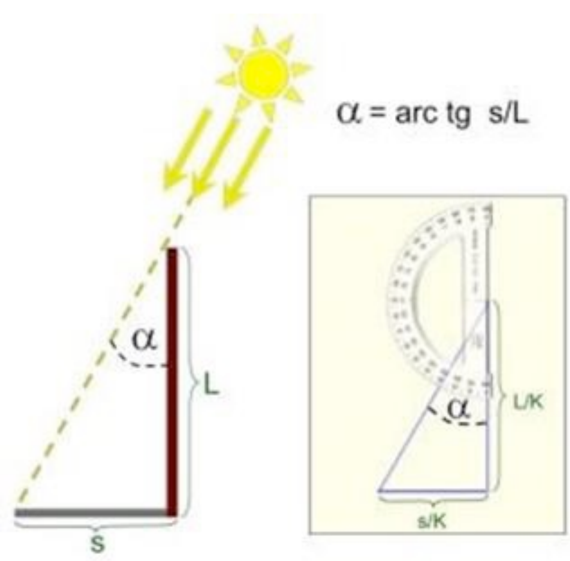

Figura 1 Medición de α mediante un transportador sobre un triángulo semejante

El experimento a realizar, toma en cuenta si se lleva a cabo en el período de primavera -verano u otoño-invierno, en el hemisferio sur o hemisferio norte. Para nuestro caso se lleva a cabo en la ciudad de Apizaco situada en el hemisferio norte durante el Otoño (Octubre). Como podemos observar en la Figura 2 existe una relación que guarda el ángulo de incidencia α con la latitud del lugar de observación λ y la declinación solar δ, que podemos expresar como:

$$\alpha = |\delta - \lambda| \text{ (hemisferio norte en otoño, la sombra se dirige al sur)} \tag{3}$$

En la fórmula anterior el valor $\delta - \lambda$ se traduce en una adición de ángulos pues la declinación solar δ es negativa debido a que el sol está por debajo del ecuador en esta época del año. Como se ve en la Figura 2 los rayos del sol inciden perpendicularmente entre el Ecuador y el Trópico de Capricornio y por lo tanto la varilla vertical situada en A no dará sombra, mientras que en nuestra latitud se producirá una sombra. Se hace el experimento al mediodía solar del lugar donde se lleva a cabo el experimento, se mide la sombra y se calcula el ángulo α.

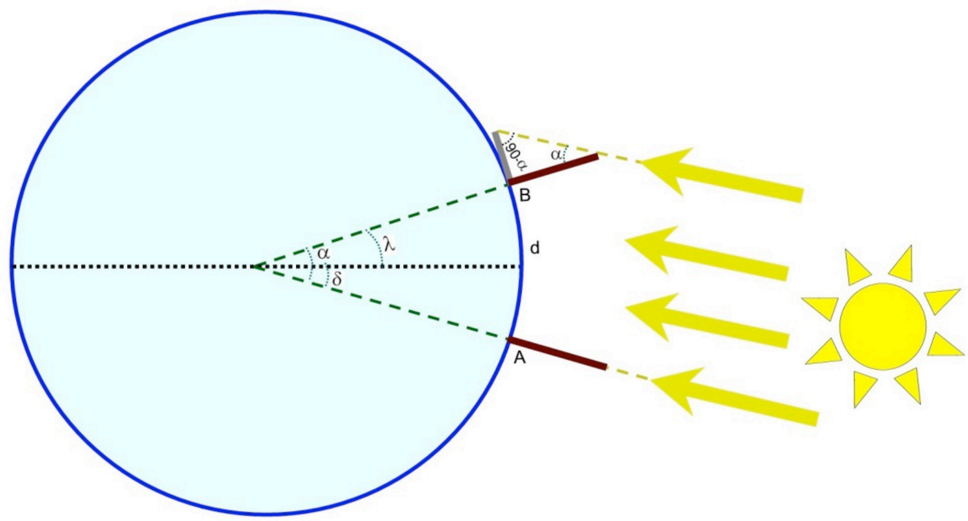

Figura 2. Incidencia de rayos solares sobre la Tierra en el periodo otoño-invierno en el hemisferio norte

Conociendo el valor de α y la latitud λ del lugar de observación (Apizaco), podemos despejar de α= δ- λ el valor de la declinación solar δ. Buscamos el lugar en la Tierra que tiene por coordenadas en latitud la declinación solar (δ) y por longitud la misma donde hacemos la medida, es decir, en el mismo meridiano.

Con estos datos abrimos el programa de Google Earth (https://www.google.es/intl/es/earth/index.html), nos posicionamos en el lugar donde realizamos la medida, con las coordenadas de latitud (λ) y longitud (δ1). Lo marcamos colocando una chincheta en el mismo. A continuación, marcamos otra chincheta y le introducimos por latitud la declinación solar (δ) que hemos calculado y por longitud la misma coordenada de longitud (δ1) de nuestro lugar de observación. Nos alejamos con el zoom para ver donde se ha posicionado esta chincheta. Con la herramienta "Regla" nos situamos sobre la primera chincheta (lugar de la medida) y nos desplazamos con el ratón hasta la segunda chincheta (lugar donde a la hora del experimento el Sol cae perpendicularmente) y se nos indica en una ventana la distancia (d) que hay entre ambos lugares (en km). Ahora solo hay que hacer una proporción o regla de tres directa:

$$\frac{\propto}{360} = \frac{d}{P} \tag{4}$$

siendo P el perímetro de la Tierra. Despejamos P:

$$P = 360° \cdot \frac{d}{\propto} \tag{5}$$

Como el perímetro de la circunferencia es $P = 2\pi r$, siendo r el radio de la misma, igualando ambos valores equivalentes y despegando r, tenemos:

$$r = 360° \cdot \frac{d}{2\pi\alpha} \tag{6}$$

Para determinar la precisión de la medida, calculamos el Error Absoluto tomando como valor verdadero del radio de la Tierra 6.371 km,

$$Ea = |6731 - r| \tag{7}$$

y a partir de él calculamos el Error Relativo,

$$Er = Ea/6731 \tag{8}$$

2.2. Método de Triangulación

El método de la triangulación básicamente consiste en colocar triángulos de dimensiones conocidas sobre la superficie desconocida, tratando de abarcar el máximo posible de dicha superficie, para después sumar el área de los triángulos, que finalmente representarían el área total. Para una superficie circular como la tierra, las bases de los triángulos podrían verse como los lados de un polígono que conforme aumenta el número de lados se aproxima al área del círculo como se ve en la Figura 3.

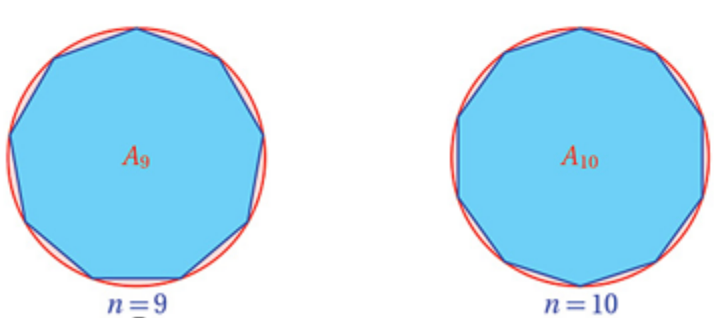

Figura 3. Conforme aumenta el número de lados del polígono, el área del polígono se aproxima al área del círculo

Los vértices de los triángulos coinciden con el centro del círculo, como podemos ver en la Figura 4

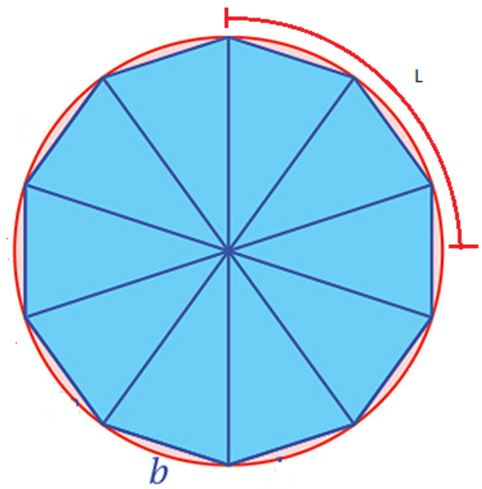

Figura 4. Superficie del círculo representada por triángulos.

Para nuestro caso, no sabemos el radio del círculo (radio de la tierra), por lo tanto procedemos a obtener la distancia de una cuarta parte del perímetro terrestre (L de la Figura 4) por medio de Google Earth, una vez obtenido este parámetro, determinamos cuantos triángulos cuya base conocida abarcan ésta distancia y la complementamos con triángulos semejantes para formar una superficie rectángular (Ver Figura 5), que finalmente se iguala con la cuarta parte de la superficie del círculo, para poder despejar el radio de la tierra. Las relaciones que se obtienen son las siguientes:

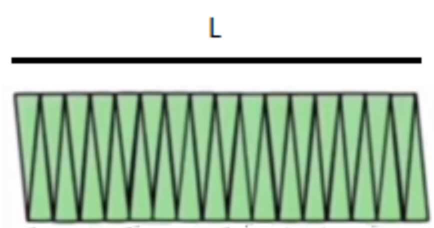

Figura 5. Los triángulos que abarcan la longitud L de la cuarta parte del perímetro de la tierra y sus complementarios que forman una superficie rectangular

$$A_C = A_R \tag{9}$$

Como sólo representamos una cuarta parte del perímetro del círculo entonces:

$$\frac{\pi r^2}{4} = Lr \tag{10}$$

De donde podemos despejar el valor de r.

2.3. Método de la Densidad

Este método aún no documentado consiste en considerar que la densidad de la luna es una fracción de la de la tierra, y se basa en la teoría del gran impacto respecto a la formación de la luna, la cual sugiere que hace 4,500 millones de años aproximadamente, un objeto del tamaño de marte llamado Tea se estrelló contra la tierra primitiva, y de los escombros originados por el impacto se formó nuestro satélite, así que podríamos considerar que su composición es mayoritariamente parecida a la composición de nuestro planeta, y por lo mismo comparten algunas de sus características, entre ellas la densidad, que se define como la relación de masa sobre volumen, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\delta = \frac{M}{V} \tag{11}$$

Tomando en cuenta lo anterior, y evidenciando que la masa de la luna y su volumen no es igual al de la tierra, podemos considerar que:

$$\delta_T = K\delta_L$$

$$\frac{M_T}{V_T} = K\frac{M_L}{V_L} \tag{12}$$

Donde K representa una constante de proporcionalidad, M_T y V_T la masa y el volumen de la tierra y M_L y V_L lo correspondiente para la luna. Tomando como datos conocidos las masas y el volumen de la luna, y notando que el volumen de la tierra queda en función de su radio, entonces podemos despejar el radio y obtener su valor.

2. PROCEDIMIENTOS Y RESULTADOS

3.1. Método de Eratóstenes modificado

Para aplicar el método, seguimos los siguientes pasos:

1. Investigamos a qué hora ocurre el medio día solar en Apizaco para la fecha en que se llevó a cabo el experimento, que fue el día 31 de Octubre cuyo mediodía solar ocurrió a las 12.37 hrs. Se dispusieron los elementos del experimento unos minutos antes, colocándose la varilla de madera en una superficie plana, para lo cual se eligió el techo del aula.
2. Colocamos una varilla perpendicular a una superficie plana, medimos su altura y la sombra proyectada, como se muestra en la Figura 6. Los valores obtenidos fueron 62.9 cm de altura y 38.9 cm de sombra, mismas que nos permitieron conocer el valor de α, de acuerdo a la Ecuación 2, siendo ésta de 31.73°.
3. Investigamos cuanta distancia hay entre donde nos ubicamos y el lugar donde no se proyecta sombra utilizando la Ecuación 3, donde la latitud de la Facultad de Ingeniería en Apizaco (Google Earth) es λ=19.4225° por lo que el valor de δ es de -12.31°, el signo menos nos indica que está abajo del Ecuador.
4. Localizamos ésta latitud sobre el mismo meridiano apoyándonos en la aplicación Google Earth obteniendo que la distancia d es de 3,500.4 Km, como puede verse en la Figura 7.

5. Calculamos el radio de la tierra despejando α de la Ecuación 4, considerando que es el valor absoluto de la resta δ-λ, entonces α= 31.72. Substituyendo d y α en la Ecuación 6 se llega al valor de $r = 6322.76$ Km.

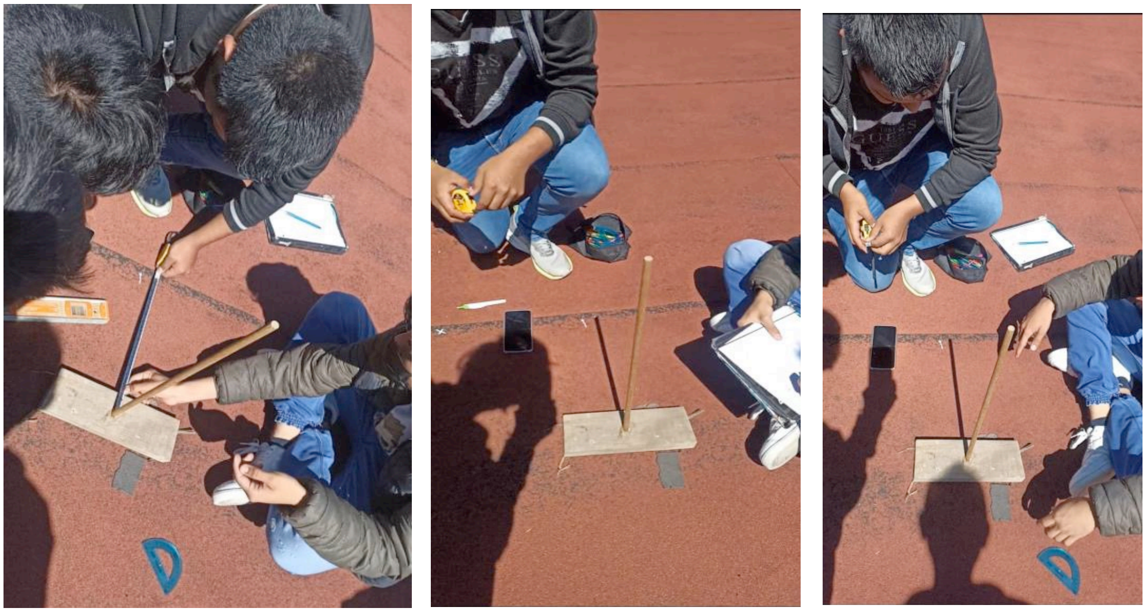

Figura 6. Colocación de la varilla sobre una superficie plana y medición de la sombra proyectada hacia el sur.

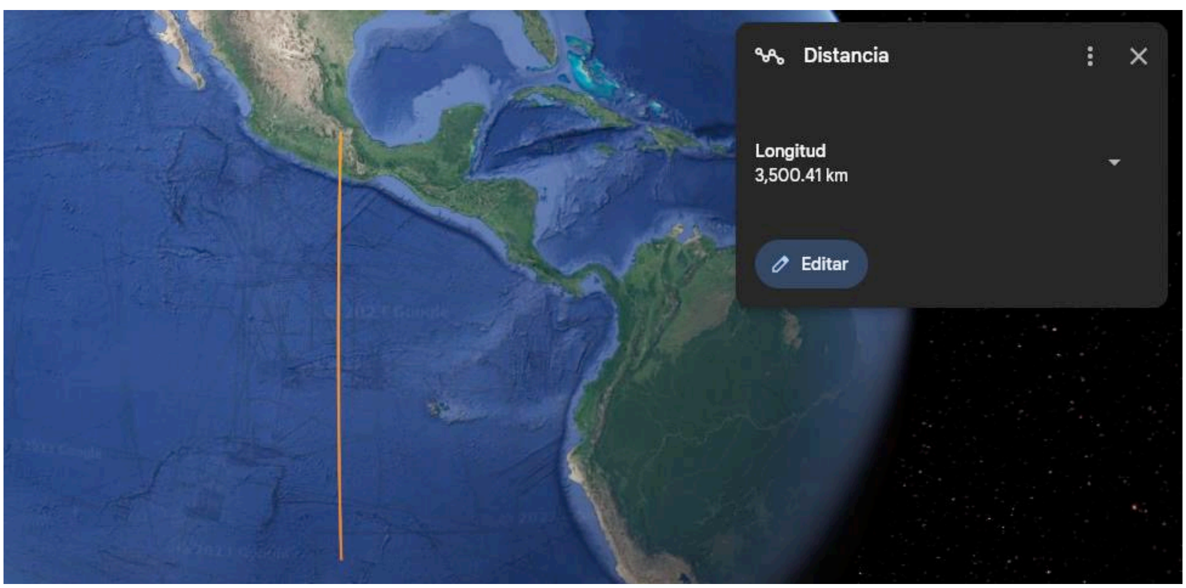

Figura 7. Obtención de la distancia entre la latitud de Apizaco, Tlaxcala y la declinación solar δ sobre el mismo meridiano

3.2. Método de triangulación

Se siguieron los siguientes pasos:

1. 1.- Se obtuvo la distancia L que representa una cuarta parte del perímetro de la tierra, con ayuda de Google Earth, fijando las coordenadas de altitud a 90° y 0° (El Ecuador), sobre un mismo meridiano, ver Figura 8.

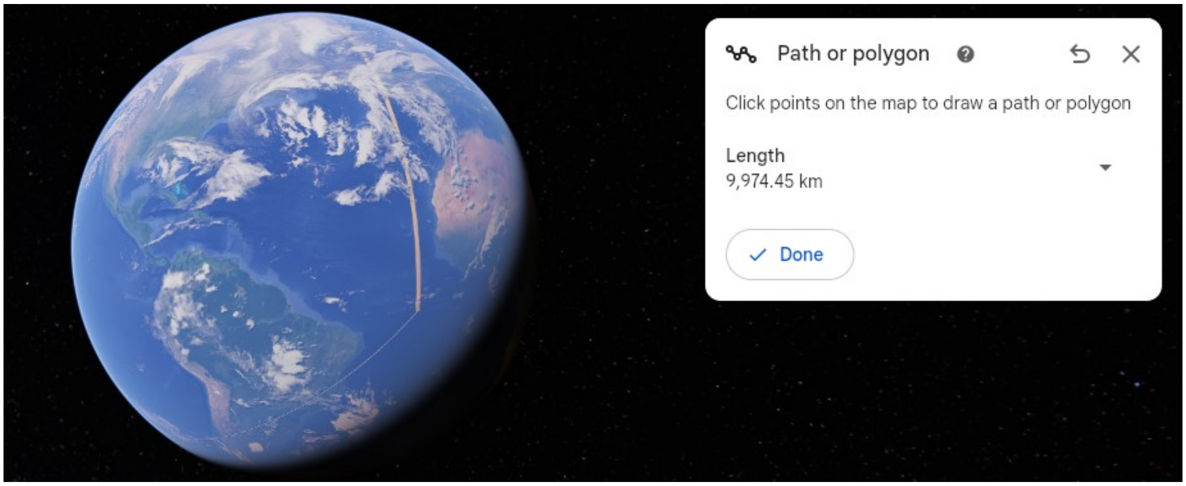

Figura 8. Distancia dada por Google Earth a altitud 90° y 0°, obteniendo 9974.45 Km

2. Definimos triángulos de base 1 Km. y los acomodamos sobre la longitud L, considerando que un número igual de triángulos inferiores generan la superficie rectangular, cuyo lado menor coincide con el radio terrestre y con la altura de los triángulos. En total, el número de triángulos fue de η=9974.45.
3. Se iguala la cuarta parte del área del círculo con el área del rectángulo representada indirectamente por 2 veces el número de triángulos del punto 2, quedando en función del radio de la siguiente manera:

$$\frac{A_C}{4} = 2\,n\,A_T \tag{13}$$

$$2\,\pi\frac{r^2}{4} = 2\,n\;\;b\;\frac{r}{2} \tag{14}$$

Despejando r, tenemos:

$$r = \frac{4nb}{2\pi} \tag{15}$$

Sustituyendo valores obtenemos que $r = 6\,349.93$ Km.

3.3. Método de la densidad

Los pasos que seguimos para aplicar este método fueron los siguientes:

1. Se investiga la masa de la tierra, la fuerza gravitacional entre la tierra y la luna, y la distancia que las separa y substituyendo estos valores en la relación que establece la ley de gravitación universal, se obtiene la masa de la luna, es decir:

$$F = \frac{Gm_T m_L}{d^2} \tag{16}$$

Y considerando que,

$$G = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}, \qquad m_T = 5.9722x10^{24}\ \ Kg,$$

$$F = 1.986\ x10^{20}\ N, \qquad d = 3.844x10^{8}\ \ Km$$

Entonces:

$$m_L = 7.367x10^{22}\ \ Kg$$

2. Se investiga la densidad de la tierra y de la luna, y bajo la hipótesis de que las densidades son iguales, con la excepción de sus dimensiones, se agrega una constante de proporcionalidad, de tal manera que:

$$\delta_T = 5515\frac{Kg}{m3}\ y\ \delta_L = 3340\frac{Kg}{m3}$$

Igualando ambas densidades con la constante de proporcionalidad se tiene:

$$\delta_T = 1.6512\ \delta_L$$

Sabiendo que la densidad se puede expresar como la relación masa y volumen ($\delta = M/V$), y tomando en cuenta que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ entonces:

$$\frac{m_T}{V_T} = 1.6512\frac{m_L}{V_L}$$

$$\frac{3\ m_T}{4\pi\ {r_T}^3} = (1.6512)\ 3\ \frac{3m_L}{4\pi {r_L}^3}$$

Sabiendo (https://brainly.lat/tarea/17437663) que el radio de la luna es $r_L = 1{,}738\ Km$, entonces:

$${r_T}^3 = m_T {r_L}^3/(1.6512)m_L$$

$$r_T = \sqrt[3]{\frac{m_T {r_L}^3}{1.6512 m_L}}$$

Substituyendo los valores dados, tenemos que $r_T = 6364.01\ Km$

A continuación, se presenta una tabla de los valores obtenidos por los tres métodos, junto al error absoluto y el error relativo respecto al valor asumido como el verdadero por distintas fuentes.

Tabla 1. Valores obtenidos por los tres métodos utilizados.

Método	Valor verdadero (Km)	Valor obtenido (Km)	Error absoluto (km)	Error relativo (%)
Eratóstenes modificado	6,371	6,322.76	48.24	0.757
Triangulación		6,349.93	21.57	0.338
Densidad		6364.01	6.99	0.11

4. CONCLUSIONES

Se han explorado los métodos que a través del tiempo han perdurado, lo que nos ha permitido darnos cuenta de que los métodos aplicados hace más de 2000 años tienen una exactitud cuya aproximación y error se deben en buena medida a la inexistencia de patrones de medición standard. Aunque los métodos antiguos exigían algunas acciones que implicaban la supervisión y ocupación directa del hombre, aquí pudimos darnos cuenta y sopesar la diferencia entre el uso de nuevas tecnologías como la aplicación de Google Earth y los métodos anteriores. Se estima un error del 15%, obtenido originalmente por Eratóstenes contra errores menores al 1% con las herramientas actuales. Hasta donde los autores hemos investigado no se ha hecho una propuesta para medir el radio de la tierra por el método de la densidad, que fue el que nos dio una mejor aproximación. Sin embargo su aplicación requirió de unas colección mayor de datos ya establecidos, tales como la masa de la tierra, la masa de la luna, el radio de la luna y sus densidades correspondientes. Algunas de ellas como el radio de la luna no pudimos obtenerla por medio de Google Earth, ya que se requería una aplicación de versión 5.0 que ya no estuvo disponible en las URL que investigamos. Se pudo apreciar la contribución de las nuevas tecnologías, así como la evolución de la investigación sobre un tema muy sencillo, que finalmente nos muestra el camino para seguir realizando contribuciones en las distintas áreas de nuestra especialidad.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la contribución invaluable del grupo de la materia de Epistemología y Metodología para las Ciencias Básicas del primer semestre de la Carrera de Ingeniería en Sistemas Electrónicos, quienes por razones de espacio y características de la revista no podemos incluir en el encabezado. Gracias a todos.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses.

REFERENCIAS

Anguita F. (2011) Biografía de la Tierra. Madrid, España. Aguilar

Circunferencia de la Tierra, www.wikiwand.com/es/Circunferencia_de_la_Tierra, España (Marzo,2024)

Paléfato, Heráclito, Anónimo Vaticano, Eratóstenes, Aneo Cornuto (2009). 376. Mitógrafos griegos. Madrid. Editorial Gredos. ISBN 978-84-249-3590-0.

Sociedad Malagueña de Astronomía (SMA). Medir el radio de la Tierra cualquier día del año [Archivo de video].YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=mkDX-GYHytg&t=1804s(13 de Abril de 2021)

Wikipedia. Triangulación, https://es.wikipedia.org/wiki/Triangulación (7 de Marzo del 2024)

Troughton B., Esteban E. (2018) Métodos alternativos para medir el radio de la Tierra, *Revista Astronomia, II Época*, Año XXXIII, Nº 225.